局所 Gauge 場の哲学とその現代史

佐藤　　均

Denkgewohnheit und Geschichte der Eichinvarianz
(On gauge transformation)

Hitoshi Sato

は じ め に

1973年はゲージ理論とクォークの理論が本格的に物理学の一つの核芯として捉えられた年であり，ゲージ理論を含まない素粒子論や自然法則は本物ではないと認識される迄になりました。20世紀前半の最大の理論を相対性原理，量子力学，場の理論の三つが一体となって完成された「場の量子論」とすると後半の最大ものはまさにゲージ場の理論であると云うことができましょう。所が多くの物理学者が指摘している様にゲージ（定規）の名前は1918年にドイツのヘルマン・ワイルにより始めて用いられたのでしたが（もっともゲージは英語ですから原論文では Eich とか Eichung と云う言葉で表現されてたに違いありません）決して適格な言葉とは考えられません。何故ならば旧くガリレイも指摘した様に任意な長さの尺度の変換に対して自然法則が不変に留るなんてことは現実にあり得ないし，その実例はついぞ見つからなかったからです。しかしワイルの様な大天才の数学者がそんなヘマをするとはちょっと考えられません，何か深い理由が当然あった筈です。gauge と云う名前の名づけ親であることは確かです。そこでこの gauge 理論の哲学を考えてみたいと思います。

§1. 自然法則の把握での変化

ニュートンが自然法則を例えば万有引力に対し大域的且絶対的に捉えようとしたことは間違いありません。それに対しアインシュタインは法則を局所的且相対的に捉えようとしたのです。[3] 一般相対性理論は基本計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を含みますが $g_{\mu\nu}$ はまさに場所，正確には時空の各点で変化するわけです。それから曲率と云う概念も局所的であります。これから考えるゲージ理論もまさに局所性を持つと思われます。局所ゲージ変換等と云う概念がこれに他なりません。局所性と相対性の追求はモダンな自然法則のとらえ方と云って良いと思います。

§2. Gauge とは

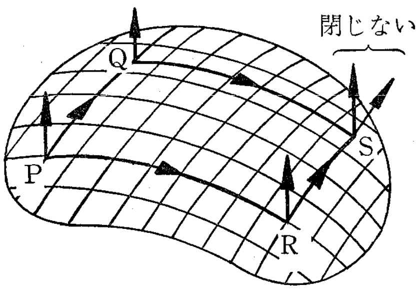
先刻ワイルのミスにちょっとふれましたが今日の gauge 理論での gauge は長さの尺度とは全く関係なくそれ以外のかなり抽象的な物理量例えば素粒子を表わす波動関数 ψ の位相とかアイソスピン，カラー等々これを内部空間の内部変数[3]と云ってますがそう云った抽象的な量と関係があります。波動は振巾と位相を持ちますから振巾ではなく位相の変換が問題になります。ですから Gauge 変換もそれらの抽象的な内部変数これは，量子数と云ってもいいかも知れませんがそれらに対する変換を意味すると考えられます。長さの尺度，定規とは関係ない gauge と云うことになります。要は自然法則が局所 gauge 変換の前後で観測量が不変にとどまる所にあるわけで，この考えが量子力学に生かされフォックとかロンドンあるいはパウリと云う大先輩が gauge と云う言葉を借用した為今日でも gauge 理論[4]と呼ばれる様になったわけで科学史の複雑ななりゆきを反映していて興味深く感じるのです。ですからワイルの当初の考えは成功しなかったわけです。〝虎は死んで皮を残す〃ことになったのでしょう。

§3. ワイル空間 (Weyl space)

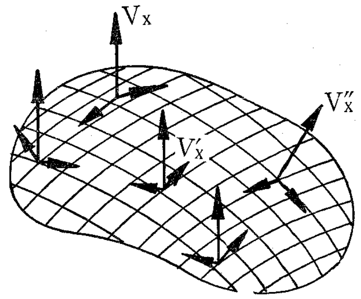
アインシュタインが一般相対性理論で採用した幾何学はリーマンの非ユークリドのそれでした。所でリーマン空間はミンコフスキー空間正しくは時空ですが，これとは異って曲がっています。正の曲率をもっと云っても良いでしょう。そのリーマン空間を更に一般化したものをワイル空間と云っていいと思います。

アインシュタインと同様ワイルも早くから重力場と電磁場を統一しょうと野心をいだいていました。ワイルにとってアインシュタインの重力場の方程式の右辺 $kT_{\mu\nu}$ 中に電磁場の存在を強調しないのが大変不満だったのでしょう。それでワイルは電磁場の存在の背後には曲ったワイル空間があるからだと主張したかったんだろうと思います。それでそのワイル空間とは正に当初ワイルが想定した長さ尺度の変換だったわけです。れそれでこれが大変驚くべき事に電磁ポテンシャルに当るものだったのです。先刻私はワイルともあろう超一流の人がそんなヘマをするものかと述べたのはまさにこうゆうわけだったのです。ワイルの場も電磁ポテンシャルも共に $A\mu \to A\mu + \dfrac{\partial\Omega}{\partial x_\mu}$ と云う gauge 変換をするからです[4]。かようにしてワイルの野心的試みは電磁場を重力場並みに同格にしょうとしたのです。

第 I 図



非ユークリド曲面でのベクトルの平行移動は，こみ入っている，二つの経路 $P \to Q \to S$。$P \to R \to S$ でそれを実施する為には四つの異る接続係数 $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ が必要になる。一つだけ書けば $A^{\mu}(Q /\!/ P) = A^{\mu}(P)\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}(P)A^{\nu}(P)dx^{\lambda}$ と表わせる。ワイル空間ではベクトルの向きも長さも P と S とでは違って来る。



fibre bundle とゲージ理論は共通点を有する。時空の各点での座標軸のとり方は勝手で良いとするからである。
M：微分可能多様体　　G：群
V_x：ベクトル空間とすると，
ファイバーバンドルは，
$(M, \{V_x\}, G)$ で表わされる。

§4.　幾何学としての Gauge 理論

1916年にアインシュタインが一般相対性理論つまり新しい万有引力理論を完成したことは物理学の幾何学化の試みの成功と考えられます。幾何学の定義をクラインと云う人が〝変換群による不変な性質を研究する学問〟としましたが，これは共形変換不変性に当たります。

そうすると Gauge 理論も必然的にレッキとした幾何学の理論と呼べることになります。

局所ゲージ変換と先刻の共形変換は殆んど同義語と考えられます。（図形では長さでなく，角度は不変でなくてはなりません。）

§5.　マクスウエル理論の拡張としてのゲージ理論

そもそもマクスウエル理論とは何んでしょうか。今日学校教育で習うマクスウエルの方程式は四つに整理されてますが，マクスエル自身が電磁気学の論文で最初に提出した諸数式とはずい分違うわけで当初は12もありましたが1864年の彼の第三論文では8つに，そして今日では4つにと段々数がへり更に相対性原理の知識で電磁テンソル $F_{\mu\nu}$ を使えば最終的に2つになるとされてます。数式が減ったばかりでなく，今日ではベクトル解析記号で書き直されてます。（英国のヘビサイドと云う人が rot, div, grad, 等の記号を発明したのでした）。そうするとマクスウエル理論とは電場 E，磁場 B 電流に関する偶数ケの方程式系であると云えるでしょう。それに加えてこれは19C．最高のそして本格的な古典場の理論は要するに連続論であり近接作用の立場なのです。相対性原理も量子力学も共に，この理論を拡張して生れたと断言でき，事実アインシュタインの特殊相対性理論とはマクスウエル理論の解釈論文であるとの考

えは今日定着しているのです。

それならばゲージ理論も19C．マクスウエル理論にその源を発しているのでしょうか？ その答えはイエスなのですが，そこへたどりつくのはそんな容易なことではありません。その問題の発端は疑いもなくマクスウエルの先刻の第三論文に出てくる電磁場 E, B, と電磁ポテンシャル A_μ とのゆるい結びつきと云いますか，本来対等の ものでない 二つの概念が 同格で入っているのですがこの事は，歴史的に見ると19C．後半におおいに困乱をひきおこしました。例えば第三論文の4番目の式，つまり，$E=\mu[v.H]-\partial A/\partial t-\text{grad}\ \phi$ がそうです。勿論よく整理された現在のマックスウエルの方程式には E, B, しか入っていません。電磁ポテンシャル A_μ (A, ϕ) 等はマックスウエル方程式に入らぬ代わりにシュレーダィンガーやディラックの波動方程式の方へ入っています。ややこしくて頭が困乱しそうですが，これら両者の関係は今日では次の様に整理されています。

Aをベクトルポテンシャル，ϕ をスカラーポテンシャルとしますと，それらと 電磁場 E, B は $E=-\text{grade}\ \phi-\dfrac{\partial A}{\partial t}$ 及び

$B=\text{rot}\ A$

と表わすのが正しいと考えられています。つまりこの二式が最も基本的な電磁気学の公式と呼べるわけです。

先刻のベクトルポテンシャルは三成分そしてスカラーポテンシャルは一成分ですので，これをまとめて，四元ポテンシャル $A_\mu(A_1A_2A_3A_0)$ 或いは同じ事ですが $A_\mu(A_1A_2A_3-i\phi)$, $\mu=1,2,3,0$ とセットにします。この四成分の書き方はアインシュタイン以来の伝統と云って良いでしょう。それで一応ベクトルポテンシャルが磁場に対応し，単独のスカラーポテンシャルが電場に対応すると見做せます。しかしここで， やや奇妙な事が生じます。 先刻の $B=\text{rot}\ A$ を眺めた際，A や ϕ が与えられればこれを微分すれば 直ちにユニークに B, E が求まりますがその逆に B, E が与えられても A, ϕ はユニークには定まりません。これをベクトルポテンシャル $\vec{A}$ の不定性(任意性)と云いますがここにおいてゲージの考えがもち上ってくるのです。もう一度まとめておきますと電磁場の分布が与えられたときこれに対応するポテンシャル ϕ と $\overrightarrow{A^\mu}$ の選び方は一意的でなく，ある群を構成しますがその群が実は Gauge に当るのです。$\vec{A}$ の不定性などと云いましたがこれはちょうど A 関数一ケ分丈不定になるわけです。$A_1A_2A_3$ の内一つは余分だと云えます。しかしマクスウエル理論からはその内のどれを捨てるべきかは何も云えません。1918年にワイルは特にマクスウエル理論の電磁ポテンシャルのこのような性質に着目してゲージ理論を提唱したと云うわけです。この所は十分的を得てまして決してワイルのミスだなどなどとは云えません。以上のわけでゲージ理論も間接的ながらマックスウエル理論の或る性質を拡張したものであることを論証したのです。

尚以前から **Eichinvarianz** (ゲージ不変性) と云う概念がありますが これは まさに 先述のベクトルポテンシャルの任意性（不定性）のことを指しています。

§6. Gauge 原理のもたらす利益，恩恵

アインシュタイン，ワイル，カルツアと云った天才達でも結局重力場と電磁場を具体当に統一するには到らなかったんですが，我々は何んとなくその理由を知っています。1920年頃には未だ「強い力」と「弱い力」が判っていなかったからですが，この二つは場の量子論でないと理解できない力ですのでこれを相互作用と呼んでいます。四つの力の内で重力場だけはかわり者で最後迄統一が待たされているのです。アインシュタインはかつて「重力場を量子化するなんてことは稚戯に等しい」と云いましたがこの重力の量子化をしないことには統一理論は出来ないのでその点大変困った事だと云えます。相対性理論とは測地線の理論でもあるわけで，

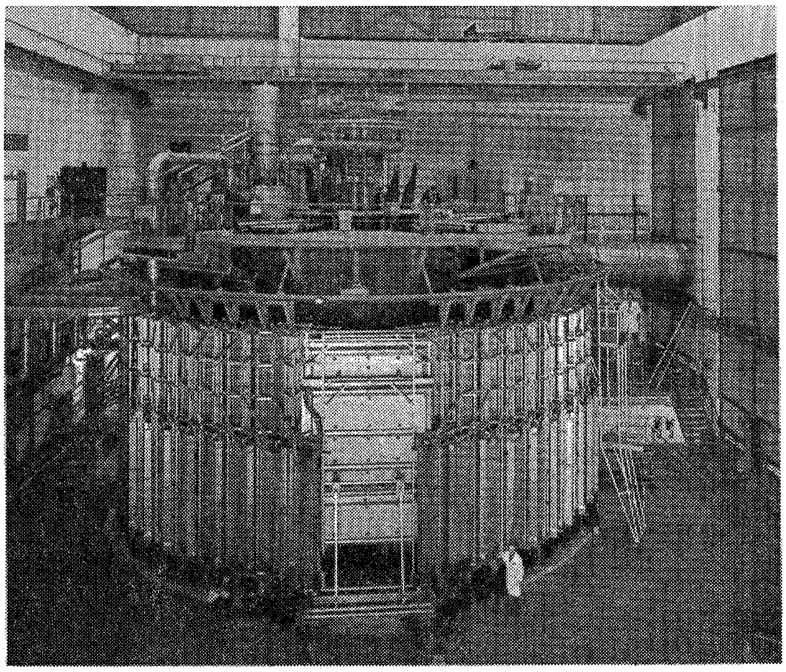
$ds^2=\sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\,dx^\mu\,dx^\nu$ の右辺の dx^μ はマクロの世界では無限小ですがこれがミクロの世界へ行くとはたしてどうなるのか誰も判からないからでしょう。話が横道にそれましたが何しろゲージ理論は今日大変強固な理論だけに大層むつかしいのですが，これには実益が伴っている筈です。大ざっぱに云っても三つ程御利益が考えられます。その優れた点とは第一に局所ゲージ変換不変性を要求すれば力の媒介粒子つまり力の場が理論的に演繹できることでしょう。現在少くとも15種のゲージ場が考えられると思います。光子の様なボゾンがそれに当る。第二に

表 1

相互作用		演繹されるゲージ粒子（場）	スピン	力学	ゲージ種類
強	GUT	グルオン（8種）	1	Q.C.D.	非可換
電磁	W.S.	仮想的 フォトン γ	1	Q.E.D.	可換
弱	超統一	$W^{\pm}$, Z^0	1	Q.F.D.	非可換
重力		グラビトン	2	量子重力理論	非可換？
その他のゲージ粒子		X-粒子 Higgs-粒子……			

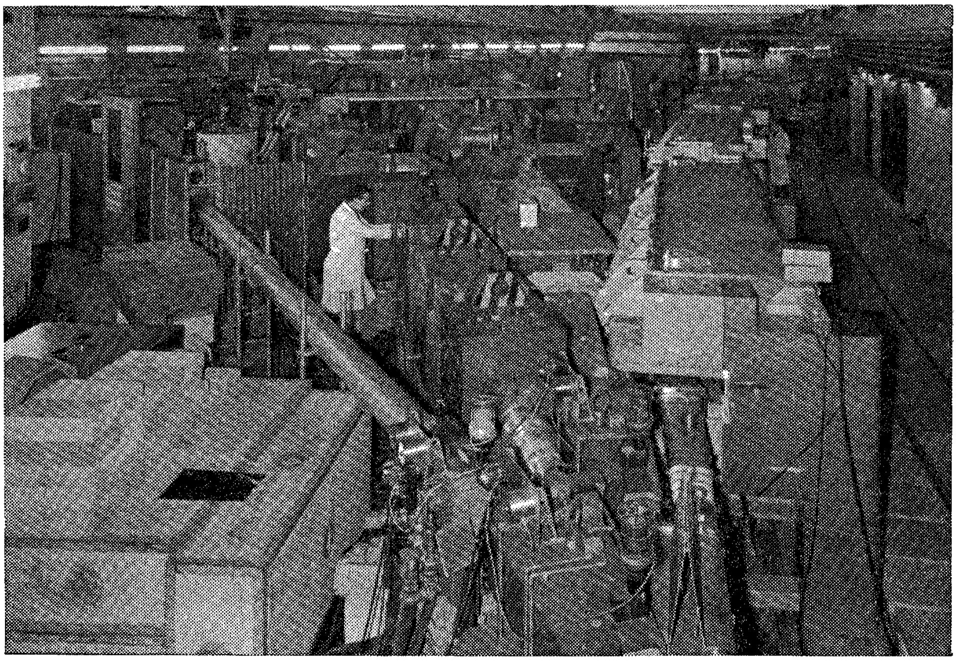
は各種の保存則が導かれること，例えば電荷，重粒子数，軽粒子数，奇妙さ……と云ったものがゲージ変換 $\phi(x)\to e^{i\chi(\lambda)}\phi(x)$ によって保障されることです。但し $\phi(x)$ は場の演算子を又 $\chi(x)$ は粒子の生成消滅のエルミート演算子 a, a^+ と読みかえればこれらの保存則が演繹されます。それから第三には力の統一理論が具体性をもって考えられることでしょう。正にゲージ理論にあらざれば素粒子論ならずの感じがするのです。現在世界各国で超巨大な加速器シンクロトロンや検出器を造ってますがその背景にはものすごく強固な理論があるからこそなのですが，そのうちの一つがまさしく Gauge 理論なのです。そして宇宙の初期にあったと思われる高エネルギーの素粒子を探ろうと努力している状態です。（超巨大加速器などは100％が税金でまかなわるのですから我々がこれらに関心を持てば持つ程税金を有効に活用していることにもなります。）ともかく素粒子論であれ又膨脹宇宙論であれおよそ基本的な自然法則の背後

ガーガメルを二まわり大きくした、ニュートリの反応で出来る泡列は熱力学的擾乱による。この装置は超強力磁場におかれ、数千トンの鉄でかこまれ、更にその上をμ検出板が囲っている。地下深く、同期ピストンがある。



セルンのニュートリの実験でクォークの香りを識別する。世界最大の泡箱（四台の魚眼カメラが見える）
西独・フランス・スイス共同設計

[1] **_BEBC_** La photographie montre la grande chambre à bulles européenne de 3,70 m (BEBC, Big European Bubble Chamber). Elle est presque totalement entourée par des équipements électroniques complémentaires pour la détection des muons. Les particules de haute énergie venant du SPS entrent en collision dans le liquide de la chambre (normalement de l'hydrogène ou un mélange néon-hydrogène) et les interactions entre ces particules et les noyaux-cibles sont étudiées sur des photographies. BEBC est l'une des plus grandes chambres à bulles au monde. Elle a été construite en collaboration par l'Allemagne fédérale, la France et le CERN; elle a produit ses premières photographies de traces de particules en 1973, avec des faisceaux du PS. A L'heure actuelle, elle est surtout exploitée avec des faisceaux du SPS pour l'étude des interactions de neutrinos.



PSの相互作用部位　(28 Gev)

には Gauge 理論がひそんでいることになります。

§7. 多次元空間との関連と平行移動

Gauge 原理の要請の一つは〝時空の各点に存在する内部空間の座標の取り方はばらばら，つまり局所的であるべし〃とするものでした。つまり各点に勝手に座標をとってもよいとする考えです。その代わり内部空間同志をつなぐ新しい量が必要になって来ます。これがゲージ場で数学では接続係数 Γ に相当し，これは頂度平行移動[3, 4]を司る役目をします。つまり自然法則はどんな尺度を使っても表現できる，我々の使う尺度とは独立な自然法則があると云うのがワイルの考えだったのです。時空の各点で様々な尺度を用いても法則は不変だと云うわけです。内部空間と云いましたがこれは実際には大きさが無視できる方向だけをもついはばフィンスラー空間かも知れないのです。そしてこの起源は今もなぞにつつまれています。多分これは宇宙のごく初期では超対称な11次元空間が自発的対称性の破れによって四次元時空と七個の内部空間に分化して生じたと考えられてます。そしてその両者の差が今では実に 10^{60} 桁もサイズの違いを生じさせたと思われます。時空の大きさが 10^{28} cm に拡大したのに対し内部空間は自発的コンパクト化により 10^{-32} cm 位に縮ったからです。勿論7次元内部空間の7は素粒子の内部属性から経験的につけ加えられた数です。時空の各点に内部空間があり，その座標は勝手にとってよいとするのが Gauge 理論ですから内部空間に在る属性を横断的に比べるには平行移動の操作が必要になります。ベクトルの平行移動です。

曲面の非ユークリド幾何学ではこの平行移動と云う操作は数学的に仲々やっかいで二つの量つまり計量テンソル $g^{\mu\nu}$ と先刻の接続係数が入用です。接続場 Γ です。$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ は定数ではなく場所によって又変わるわけです。ユークリドの平面では経路に沿ったベクトルのどんな平行移動をしてももとへもどりますが非ユークリドの曲面では決してそうなりません。ワイル空間とは後者です。その図を見比べて下さい。ベクトルの平行移動を司る $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ が実は Gauge 場に当ることになります。一見大変意外に思えます。ですからアインシュタインの一般相対論の等式の左辺は $g^{\mu\nu}$ につつき2階の微分方程式でも表現されるのだと思います。

$$\frac{1}{2}\sum_{\alpha}\frac{\partial^2 g^{\mu\nu}}{\partial x^{\alpha}}=kT^{\mu\nu}$$

左辺がアインシュタインのテンソル $G^{\mu\nu}$ となるわけですがこれはリーマンの曲率テンソルを一回縮約したものでした。($k=8\pi G$) アインシュタインにとっては S^2 を不変に保った上での一般座標変換不変性を主張したのに対しワイルの方は $g^{\mu\nu}\to\Omega(x)g^{\mu\nu}$ とゲージ変換を要求するものでした。$S^2=\sum g^{\mu\nu}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu}$ ですから $g^{\mu\nu}$ が変われば尺度 S^2 も変わってしまいます。

$\Omega(x)$ と云うのは x の任意なスカラー量で長さに当ります。以上がワイルの当初のもくろみでもありました。大変独創的ですがやや過激な考えであると云えましょう。

§8. クーロン力の正体とは

電磁場はアーベル的つまり可換ゲージ理論でマクスウエル理論は線形である事が知られています。電磁相互作用こそすべてのゲージ場理論の出発点であり手本であることを否定する人は先ずないでしょう。電磁場のゲージ理論を実証する実験が1959年のアハロモフ，ボームの「電子ビームの干渉実験[5]」でした。そこでは確かにビームの通路にソレノイドの磁場を与えると干渉縞が変化しますがこれは波の位相が影響されることを如実に示します。これは正に局所ゲージ不変性を実証した最初の試みでもあるわけです。 それは Schödinger や Dirac の方程式（例えば $\sum_{\mu=0}^{3} r_\mu \frac{\partial \phi}{\partial x_\mu}+ik\phi=0$）が E，B を含まず電磁ポテンシャル $A_\mu(A_1A_2A_3\phi)$ と関係するからだと考えられます。先刻ゲージ不変性の為 A_μ の四つの内一つは余計であると申しましたが，先ず ϕ が電場を，残りの A の内の二つが横波成分を与えます。あとの一つは大変奇妙ですがゴーストの様な縦波成分 $\varepsilon^{(3)}$ と解釈されますがこれは仮想フォトンに当り，これこそ正に荷電粒子間のクーロン力を与える原因であることが場の量子論から示されています。当然仮想フォトンの呼吸によりクーロン力が現われるのですが仮想フォトンが観測される確率はゼロ*です。(他方あらゆる化学結合はこういった電気力（電磁相互作用）から大変複雑に派生した力で結ばれています。) アハロモフ・ボームの干渉実験は最近ホログラフィーの技術によってより視覚化して見ることが出来る様になりましたがホログラフィーはエネルギー以外に波の位相の情報も与えてくれるからです。そこでは仮想光子がゲージ場として活躍し局所ゲージ不変性で，身うごきができなくなった電子を云わば救ってくれるのです。

それによって波動方程式もこわされずに済むわけです。尚 光は以前から 二つしか 偏極状態 $\varepsilon^{(1)}$，$\varepsilon^{(2)}$ がないことが判ってましたからこれが正に先刻の A_μ の内の二つの横波成分と一致しますからこれでやっとすっきりしたと云えます。観測されるのはこの二つで，さっきのゴーストの方はそうならないのです。 ゴーストこそゲージ粒子だったのです。 偏りのベクトルは $\varepsilon_\mu{}^{(\lambda)}(k)$ で $\lambda=1, 2, 3, 0$ で $\varepsilon^{(0)}$ はスカラー光子を示します。

§9. 一般共変性とゲージ対称性

光量子の様なゲージ粒子の特性は本来質量が正確にゼロでスピンは 1，しかもその作用の及ぶ範囲は無限大であることが場の量子論から要求されます。しかも大域的ゲージ不変性の考えでは物質粒子たるフェルミオン（スピン½）のみの系で十分ですがその反対に局所ゲージ不変性の理論ではどうしてもフェルミオン以外に力の粒子たるボゾン（スピン１）がなくてはならない事がはっきり要求されます。

最小作用の原理を仮定すれば一つの対称性から必ず一つの保存則が出て来ます，つまり両者

の間に 1:1 の対応関係があるわけです。（これは多分1918年のドイツの女流数学者 E. ネーターが時空と E, $\vec{P}$, $\vec{L}$ の保存則との対応関係を指摘したのがきっかけだと考えられます。）この 1:1 の対応関係も実は広義のゲージ理論とつながりがある筈です。そこでしばらくその事情を科学史の観点でふりかえって見ましょう。先ず Newton 力学の慣性法則はガリレイ変換に対し不変になってますし，又マクスウェルの方程式はローレンツ変換に対し共変になっています。1905年の特殊相対性理論はこれ又ローレンツ変換で不変，更に1916年の一般相対性理論は一般共変性を維持しておりそれからワイルの理論は四次元距離 S^2 を動かしても法則が不変に留ることを要求するものでした。(1918年)。その後波動力学つまり本格的な量子力学の体系がととのえられますが例えば化学で扱う周期律や電子配列表の体系はどの様な対称性をもつのでしょうか。これはまさしく電子の波動方程式の座標の回転の対称性によりそこから演繹されたと考えなくてはなりません。つまり任意な回転操作をほどこしても方程式は不変に留るのでした。

これらの実例からも判断できる様に不変性つまり対称性が自然法則の法則であると云う認識がいやが上にも強化されます。ですから現在では「座標の変換不変性は形式的で空虚な理論だ」など云う人は先ずないと云えます。一方素粒子の全体像への理解から我々は程遠いいが疑いもなく対称性を示す世界でありそれ以外に相対論つまり時空にも左右された世界だと云えます。プラトン流に云えば素粒子とは幾何学的形相を呈する一群と表現できるでしょう。抽象的対称性です。変換群の既約表現にあたります。

§ 10. ゲージ場の種類と群表現

ゲージ理論もリバイバルの典型です。ワイルの当初のもくろみが不首尾に終ってから約50～60年間は力の統一理論なんていうものは人々の目標から遠ざかりました。それを蘇生させた恩人はヤン・ミルズと又日本では内山竜夫（帝塚山大学々長）の三名です。これらは数学的に大変こみ込ってますが非線形で非可換つまり非アーベル的ゲージ場理論で無数の相互作用項がある為解くのが殆んど出来ないのです。電磁ポテンシャルは A_μ 一ケでよいがヤンミルズの場では $\{A_\mu{}^1\ A_\mu{}^2 \cdots\cdots A_\mu{}^N\}$, $N>3$ のセットで示されます。相互作用の為その内の一つだけとり出してゲージ変換する事は出来ません。

ヤンは弱い相互作用では空間の parity 対称性が最大限に破れていることを主張し世界をびっくりさせたことでも有名です。〝自然の神は左利き〟なんて云うことがいわれたものです。β- 崩壊がよい実例でしょう。特に非アベルゲージ理論つまりヤン・ミルズの場では内部空間を表わすのに群か，又は表現空間の少くとも一つが必要と考えられます。アイソスピンは，$SU(2)$ 群の対称性を有しその表現空間は二次元のリーマン複素空間でしょう。カラーと云う属性は $SU(3)_c$ 群の近似的対称性を有しその表現空間は三次元の複素空間が必要になりま

す。大統一理論 GUT は W, S 理論を含み，その対称群は $SU(5)$ とされますが $SU(5)$ は近似的に対称性を有するわけで $SU(3)_c\times SU(2)\times U(1)$ の組合せで構成される筈です。注意しなくてはならない事は $SU(n)$ の対称性はあまり厳密なそれではないことです[5]。$SU(3)_c$ 群の〝色〟をになう実体がクォークでハドロンの構成子に他なりません。$SU(6)$ 理論はよくわかりません。$SU(4)$ は $SU(3)$ を立体化したもので素粒子の立体的分類を可能にしますから魅力があります。つまり $(C,\ S,\ I_3)$ の座標にダイヤモンドの様な12配位多面体が形成され，それが又いくつか集り群を構成するからです。これはいわばティマイオスの中に出てくるプラトンの五体の現代版と云っていいかも知れません。このようにして Gauge 対称性とは大変に抽象性の高い，直観ではつかみにくいと云えましょう。($SU(3)_c$ のゲージ変換は $\psi_i\to\psi'_i=\exp(-i\theta\cdot\lambda/2)\psi_i$ と表わせます。

§ 11. 宇宙論との関連

ゲージ原理の到達した地平線は自然法則をグローバルなものとしてではなく相対的にローカルにとらえ直す事でした。その意味ではマッハの原理と符合した所があるわけです。この事は大域的法則を断念するのではなく局所的なものから演繹しようとするわけで必然的に進化論的宇宙論をもたらす事になります[3]。

素粒子に確かに対称性と関係しますが又相対論のしめつけを受けます。最近の見解では時空のゆらぎが素粒子そのものであるとの考えが支配的になっています。真空においても場のゆらぎが静かに平衡状態にあると考えられてます。20C．後半の現代物理学の著しい特徴は今迄別々と考えられた例えば素粒子と超電導，超低温と云った物性論にある関連性がみとめられた事でそれとゲージ理論が相まって現代宇宙論が進展したと考えざるを得ません。

更に場の量子論もゲージ理論も法則の局所性と明白な共変性と云う点で合通じる所があると信じられます。加えて現代膨脹宇宙論はとことん返一般相対論と拡張マッハ原理を信じることによってはじめて得られたと思われる次第です。熱力学の第四法則も現実味をもつに至りました。

§ 12. 奇妙さこそ真実か？

ゲージ理論はその名からして奇妙でその実「長さとは無関係な定規（ゲージ）理論」と云うことになりました。その理論は広義つまり第一種のゲージ理論はゲージ変換では古典的なラクランジアン密度 L が不変な理論を意味し，他方狭義の つまり第二種のゲージ理論では局所ゲージ変換で四次元ベクトル場つまりゲージ場が存在することを意味しています。特に後者は運動方程式をこわさずに不変にすると云う要請からゲージ場の従う方程式や質量までユニークに

決めてしまう大変強力な規制であると思われます。光速不変の原理すなわち特殊相対性原理と電荷の保存（つまりゲージ不変性）の二つの条件を満たす最も簡単な方程式を求めれば必然的にマクスウエルの方程式以外のものにはなり得ません。これを量子化すれば勿論量子力学の基本方程式になります。他方一昔前大変奇妙と思われたクォークの実在が信じられる様になったのはゲージ原理の指導力のお蔭げと云って良いでしょう。ともかく正準量子化可能なラクランジアンやラクランジアン密度は存在しなくてはなりません。これらは正に森羅万象をとりしまると思われる場を規定するからですがそのラクランジアン密度 L の相互作用項の形をどうして決めるかが最も基本的な事柄ですがこれを解決する手がかりはやはりゲージ理論だと思います。我々は素粒子の全体像の理解には程遠いのですがともかく局所ゲージ不変性（対称性）を示す概念的担体であることは間違いないでしょう。

ここに掲げた写真は CERN の陽子シンクロトロンですがゲージ粒子を見つけるのも一つの大きな役目であり，事実，弱い相互作用での $W^{\pm}$, Z^0 のベクトルボゾン（weakon）がこれらの装置で最近見つかったのでした。[11] つまり超高エネルギーの陽子と反陽子の正面衝突によってゲージ粒子が発生したのです。これは電磁相互作用での媒介粒子たる光子の仲間であり，これら四つのボゾンが元来同時に W. S. 理論で演繹されると考えなくてはなりません。

ついでに昨年特に見学が許された超巨大水素泡箱たる改良型 BEBC の写真[1]も掲せておきます。これは高エネルギーの ν によりクォークの香りすら識別する能力があると考えられます。μ- 検出枚で囲われているのが見えます。

§13. 数学的側面（ゲージ変換）

ゲージ変換はラクランジアンの様な測定可能な場の parameter を不変に保ったまま，ポテンシャル A_μ の様な場の特性量を変換することでした。そしてクーロンゲージとかローレンツゲージ等ゲージを指定することによって A_μ の値の決定の際生じる不定性が一部又は完全に除去されることでした。例えば波動力学で波動関数 ψ は任意の位相を追加しても観測量は不変でした。他方マクスウエル理論での不定性は未知数が見掛け上6つある様に見えますが実の所は4ケだったのです，その様にマクスウエる理論の特徴をもっと一般の場に拡張したのがゲージ理論に他なりません。電磁相互作用では例えば $\phi(x)$ を場の operator, $\chi(x)$ をパラメーター x の連続関数であるエルミート演算子とすれば $\phi(x)$ の作用で電荷が e だけ増したとすれば $\phi(x)\to e^{ie\chi(x)}\phi(x)$ および $A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\dfrac{\partial\chi(x)}{\partial x_\mu}$ と書けます。但し $\chi(x)$ は $\Box\chi=0$ を満たす任意の関数です。

$A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\dfrac{\partial\chi(x)}{\partial x_\mu}$ によってマクスウエルの四元電磁場テンソル $F_{\mu\nu}$ を含む観測量は不変でなくてはなりません。今日の電磁力学ではクーロンゲージの条件つまり div $A=0$,（これはマクスエル自身が実行したと考えられます）よりもローレンツのゲージ条件 $\partial A_\mu/\partial x_\mu=0$

($\mu=1, 2, 3, 0$), $A_\mu=(\mathrm{A}, i\phi)$ の方がよりよく利用されると思われます。そのゲージ変換は，$\phi\to\phi'-\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\chi}{\partial t}$ 及び $A\to A'+\nabla\chi$ をし，そこでは χ は $\Box\chi=0$ を満たさなくてはならないので，ラクランジアンは不変になります。

ローレンツゲージは又 $\nabla\cdot A+\dfrac{1}{c}\dot{A}_0(x)=0$ とも書けます。$\Box$ は $\nabla^2-\dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ です。

ゲージ変換の物理的意味は様々なゲージ変換の統合に関し，ラクランジアンの不変性と関連してます。ラクランジアンの相互作用項の形が $\phi(x)\to e^{i\chi(\lambda)}\phi(x)$ の型の変換に対して不変であればそれに伴って保存則が出て来ます。ここで λ は位相をあらわします。ワイルが当初考えた〝長さのゲージ〟は不思議なことに数学的には $A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\dfrac{\partial\Omega(x)}{\partial x_\mu}$ と同形の変換をするわけでその所が量子力学に採用されたのだと思います。波動力学でもミニマルな電磁相互作用のある場合[9]は次の様にエネルギー，運動量がゲージ変換を受けるからです。すなわち，

$H_0\equiv ih\dfrac{\partial}{\partial t}\to ih\dfrac{\partial}{\partial t}-eA_0(x)$ 及び $p\equiv\dfrac{h}{i}\nabla\to\dfrac{h}{i}\nabla-\dfrac{e}{c}A(x)$ そうしますとハミルトニアン H は，$H_0=P^2/2m$ ですから，$H=\dfrac{1}{2m}\{p-(e/c)A(x)\}^2+eA_0(x)$ と書けます。

さて電磁場中での電子系を記述する古典論的なラクランジアンに対し $A_\mu(x)\to A_\mu(x)+\dfrac{\partial\chi(x)}{\partial x_\mu}$ のゲージ変換をするとラクランジアンは時間の全微分丈変わり運動方程式は維持されるがその時作用積分 S に $S(x)\to S(x)+\chi(x)e/c$ の変換が生じます。ヤンミルスは非アベル的ですが今 $U(x)$ を x に依存する任意の iso spin 回転とすれば $\phi(x)\to U(x)\phi(x)$ の変換に対して不変となります。しかし非線形ですので解く事が殆んど出来なくなります。それでも非可換ゲージ理論の方が有力視されています。

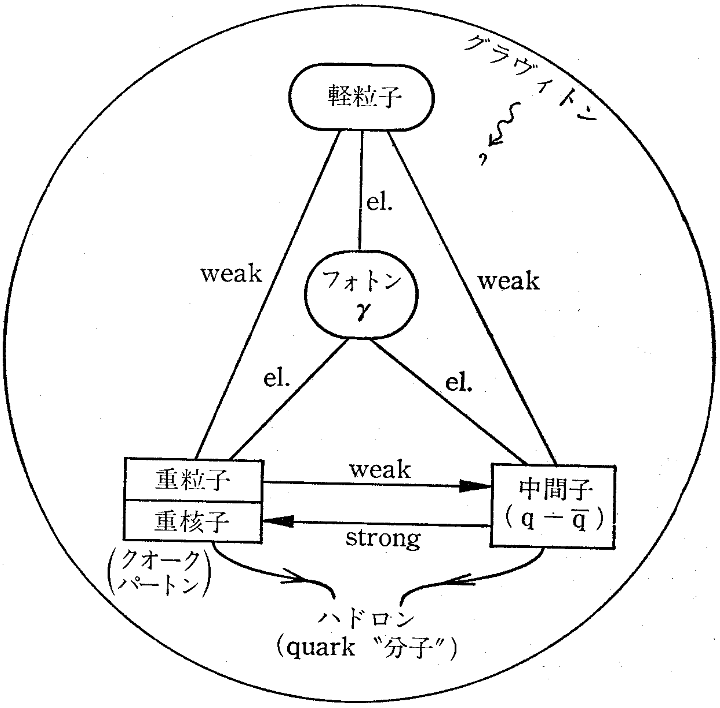
最後に量子色力学での漸近的自由は正にヤンミルズの非可換ゲーダ場の理論の特徴であることに言及したいと思います。この為にクォークは単離するのが不可能とされてます。
($SU(3)_c$ の理論)。

§14. 時間論への適用

元ハンブルグ大学教授の松下真一氏[7 8)]はゲージ理論の哲学を宇宙論的スケールでの時間論へ適用を試みそこでは時間を非線形の Ortzeit（局所時間）と見做し微分可能多様体への「接続」として捉えました。所がこれはきわめて難しく理解するに到りませんでしたが，彼は宇宙膨張論にすらある疑念を表明してます。その彼の結論は「時間のはじまりなんかは出てこない／」でした。恐らく彼は仏教哲学からの影響を濃く受けた為そうゆう結論に達したのではないかと思います。彼の考えは光学的赤方変位は膨張なんかではなく「時間そのものの性質」から由来すると主張しています。これこそ我々にとって最大な Απορια に違いありません。非線形の時間なのです。

おわりに（結語）

大体以上の様に Gauge 原理の考えと歴史を述べて来ましたが，そのルーツは予想外に旧いことが判りました。マクスウエルは最初にハミルトンやテートの発明した四元数を物理学に導入しましたがこの四元数 $\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$ は更に旧く1819年頃の K. F. ガウスの 複素数や 超複素数に起源を有すると考えられます。後者は $\chi=\alpha+\beta i+\gamma j+\delta k$, $ijk=-1$ で表わされるもので明らかに非可換性を示す事，更に回転対称群を加味すると複素数のそれが可換ゲージ理論に又超複素数のそれが非可換ゲージ理論の出発点になると考えられます。本論文ではとうていヤンミルズの場の具体的な形等を論ずるには到りませんでしたが最後にヤン・ミルズ場 $F^{a}{}_{\mu\nu}$ が三階の混合テンソルで此のゲージ変換が例えば $A_\mu{}^a \to A_\mu{}^a + f^{a}_{bc}\varepsilon^b A_\mu{}^c + e^{-1}\partial_\mu \varepsilon^a$ の式に従う事，及びそのラクランジアンが $-(1/4)\sqrt{-g}\,F_{\mu\nu}{}^a F^{a\mu\nu}$ の形をしており更にヤンミルズの場の強さは2階非線形をしていて $F_{\mu\nu}{}^a = \partial_\mu A_\nu{}^a - \partial_\nu A_\mu{}^a - e f^{a}_{bc} A_\mu{}^b A_\nu{}^c$, と少くとも 三つの項⑥で なくてはならない事を指摘して終りたいと思います。



第Ⅱ図　粒子と相互作用の全体像

但し，グラヴィトンは宇宙のごく初期にのみ相互作用が出来た。フォトンはゲージ粒子。

Appendix :

本論にかかわる若干の基本的 Lagragian 密度 L の表現形態

① Maxwell の古典場　$L_{em}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\,F^{\mu\nu}$　ここで $F^{\mu\nu}$ は共変量で $F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$

② 質量 m の自由なスカラー場 $\phi(x)$　$L(x)=\frac{1}{2}[\partial^{\mu}\phi(x)\cdot\partial_{\mu}\phi(x)-m^2\phi^2(x)]$

③ 自由なフェルミオン（Dirac 粒子），φ をスピノルとして　$L_0=\varphi(i\partial-m)\varphi$

④ 量子電気力学 QED に対し中西のB場形式を使えば，

$$L=-\varphi(-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}+m_0-e\gamma^{\mu}A_{\mu})\varphi-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}+B\partial^{\mu}A_{\mu}+\frac{1}{2}\alpha B^2$$

又は

$$L=\varphi(i\partial-m)\varphi+e\varphi\gamma^{\mu}\varphi A_{\mu}-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{1}{2\xi}(\partial.A)^2$$

⑤ 複素スカラー場　$L_0=(\partial_{\mu}\phi)^{+}(\partial^{\mu}\phi)-m^2\phi^{+}\phi$

⑥ QCD に対する $Y.M.$ 場　iを flavor とし

$$L=\sum_i\overline{\varphi}^i(i\partial-m_i-g_s\frac{\lambda^{\alpha}}{2}A^{\alpha})\varphi_i-\frac{1}{4}F^{\alpha}{}_{\mu\nu}$$　ここで，

$$F^{\alpha}_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A^{\alpha}_{\nu}-\partial_{\nu}A^{\alpha}_{\mu}-g_sf_{\alpha\beta\gamma}A^{B}_{\mu}A^{\nu}_{\gamma}$$

⑦ 大局的位相変換と局所的位相変換の表現

$$\varphi(x)\to\exp(-i\alpha)\varphi(x)$$

$$\varphi(x)\to\exp(-i\alpha(x))\varphi(x)$$

* $\langle 0|-a^{(0)\dagger}a^{(0)}+a^{(3)\dagger}a^{(3)}|0\rangle=0$　（§8 の個所）

文　献

1） CERN en image, CERN in Bildern '1983

2） ヨーロッパ科学通信　中村誠太郎（読売新聞社）

3） ビッグバンの発見　佐藤　文隆（NHK. Books）

4） 相対論の再発見　藤井　保憲（Blue Backs）

5） ニュートリノの謎　長島　順清（SCIENCE 社）

6） 本学紀要 10号と16号 佐藤　均

7） 時間と宇宙への序説　松下　真一（SCIENCE 社）

8） 法華経と原子物理学　松下真一

9） 古典場から量子場への道　高橋　康（講談社）

10） 物理と人間，T. R. Gerholm Aldus 社，Sthlm

11） 簡易自然科学史　14章　佐藤　均